$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0P}\right| &= |A(r-x_0)+B(s-y_0)+C(t-z_0)| \\ &= |Ar+Bs+Ct+D|.\end{aligned}$$

（注意到 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，即 $-(Ax_0+By_0+Cz_0)=D$.）由此得到计算距离的公式

$$d(P,\pi)=\frac{Ar+Bs+Ct+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.2}$$

用点到平面的距离就可计算下面几个距离：

(1) 直线到与它平行的平面的距离就是线上一点到平面的距离；

(2) 平行平面间的距离就是一张平面上的一点到另一张平面的距离.

设平面 π,π' 的方程分别为：

$$\pi: Ax+By+Cz=0,$$

$$\pi': Ax+By+Cz+D'=0,$$

则它们的距离

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(3) 异面直线间的距离也可转化为点到平面的距离. 设 l_1,l_2 是一对异面直线，它们之间的距离 $d(l_1,l_2)$ 是指它们的公垂线（即和 l_1,l_2 都是既垂直又相交的直线）与它们的两个交点间的距离. 如果过 l_1 作平行于 l_2 的平面 π，则 $d(l_1,l_2)$ 也就是 l_2 到 π 的距离.

设 l_1 过点 M_1，平行于向量 $\boldsymbol{u_1}$；l_2 过点 M_2，平行于向量 $\boldsymbol{u_2}$. 记 π 为过 l_1 并平行于 l_2 的平面，则 $d(l_1,l_2)$ 就是 M_2 到 π 的距离.π 的法向量为 $\boldsymbol{u_1}\times\boldsymbol{u_2}$. 于是有公式

$$d(l_1,l_2)=\frac{\left|\left(\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{|\boldsymbol{u_1}\times\boldsymbol{u_2}|}.$$

例 4

(2) 点到直线的距离

设直线 l 经过点 M_0，平行于非零向量 $\boldsymbol{u}$，则点 P 到 l 的距离等于向量 $\overrightarrow{M_0P}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上的

外射影的长度（见图 2-1），即

$$d(P,l)=\frac{\left|\boldsymbol{u}\times\overrightarrow{M_0P}\right|}{|\boldsymbol{u}|}$$

. 请读者在直角坐标系中用坐标写出这个公式.

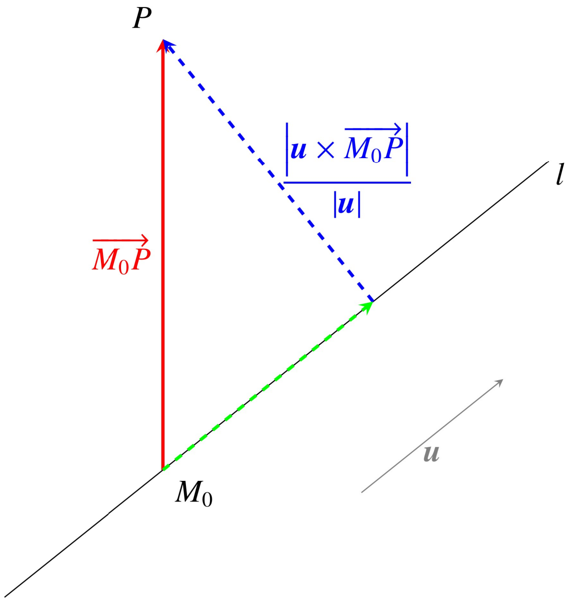

图 2-1

如果直线的方程是一般方程，一般先求出点向式方程，再用上述公式.

平行直线间的距离也就是其中一条直线上的任意一点到另一条直线的距离.

(3) 夹角

(1) 平面与平面的夹角. 设平面 π_1,π_2 相交，则交线把每张平面都分割成两张半平面，从而形成四个二面角，它们的角度或相等，或互补. 把其中较小的那个规定为这两张平面的夹角的角度. 如果 π_1,π_2 分别有法向量 $\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}$，则它们的夹角为

$$\theta=\arccos\left(|\cos\langle\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle|\right).$$

即当 $\langle\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle$ 是锐角时，θ 就是 $\langle\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle$；当 $\langle\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle$ 是钝角时，θ 就是 $\langle\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}\rangle$ 的补角.

(2) 直线与直线的夹角. 设直线 l_1, l_2 分别平行于非零向量 $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$，则它们的夹角规定为

$$\theta = \arccos\left(|\cos\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\rangle|\right).$$

即当 $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\rangle$ 是锐角时，θ 就是 $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\rangle$；当 $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\rangle$ 是钝角时，θ 就是 $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}\rangle$ 的补角.

(3) 直线与平面的夹角，指从平面上看直线的仰角，即直线与它在平面上的正射影的夹角. 设直线 l 平行于非零向量 $\boldsymbol{u}$，平面 π 有法向量 $\boldsymbol{n}$，则它们的夹角为

$$\theta = \arccos\left(|\sin\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}\rangle|\right).$$

注：异面直线的公垂线就是与它们都正交的直线.

10 旋转面

(1) **定义 10.11** *由空间的一条曲线 Γ 绕某一直线 l 旋转而得到的曲面称为旋转面. 称 l 为它的轴线，称 Γ 为它的母线.*

(2) 求法：

把以 l 为轴，Γ 为母线的旋转面记作 S. 为了建立 S 的方程，首先来分析 S 上点的特征. 设 l 过点 M_0，平行于非零向量 $\boldsymbol{u_0}$.

显然，空间一点 M 在 S 上的充分必要条件是 M 绕轴线旋转而得的圆和 Γ 有交点；或者 Γ 上存在一点 M'，使得它的纬圆经过 M，也就是 $\overrightarrow{M'M}$ 与 l 垂直，并且 M 和 M' 到 l 的距离相等. 因为 $\overrightarrow{M'M}$ 与 l 垂直，所以 M 和 M' 到 l 的距离相等等价于 M 和 M' 到 M_0 的距离相等. 于是我们得到：

$$\begin{aligned} M \in S &\iff ①\exists M' \in \Gamma，使得 \overrightarrow{M'M} \cdot \boldsymbol{u_0} = 0，并且 \left|\overrightarrow{M_0M'}\right| = \left|\overrightarrow{M_0M}\right|. \\ &\iff ②M 绕轴线旋转而得的圆和\ \Gamma\ 有交点. \end{aligned}$$

当 Γ 的方程给出后，利用上面充分必要条件①求 S 的方程的步骤为：先用 $\overrightarrow{M'M} \cdot \boldsymbol{u_0} = 0$ 求出 M' 的坐标（作为 M 的坐标的函数），再用 $\left|\overrightarrow{M_0M'}\right| = \left|\overrightarrow{M_0M}\right|$ 写出 S 的方程.

例 5

(3) 常用公式：

设在 yOz 面上的一条已知曲线 C，它的方程为：

$$f(y,z)=0$$

曲线 C 绕 z 轴旋转一周，得旋转曲面. 设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 是曲线 C 上任一点，$M(x,y,z)$ 是点 M_1 绕 z 轴旋转所得的任一点，则：

(a) $z=z_1$;

(b) 点 $M(x,y,z)$ 到 z 轴的距离为：

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z_1=z, y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入曲线 C 的方程 $f(y_1,z_1)=0$，得旋转曲面的方程为：

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

说明：由坐标轴的对称性读者容易可以得到讲义中的结论的其他形式，为方便起见，讲义主要论述其中一种具体的形式，后不赘述.

(4) 常见例子：

以 yz 平面上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 为母线，z 轴为轴线的旋转面是旋转椭球面，其方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

yz 平面上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕它的虚轴 z 轴旋转得到的旋转双叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1.$$

yz 平面上的抛物线 $y^2=2pz\quad(p>0)$ 绕对称轴 z 轴旋转得到的旋转抛物面的方程为

$$x^2+y^2=2pz.$$

11 柱面和锥面

由直线绕与它平行的轴线旋转所得的旋转面称为圆柱面. 母线与轴线的距离称为它的半径. 圆柱面由轴线和半径这两个因素决定，它就是到轴线的距离等于半径的点的轨迹.

由直线绕与它相交而不垂直的轴线旋转所得的旋转面称为圆锥面. 母线与轴线的交点称为锥顶，夹角称为它的半顶角. 圆锥面由轴线、锥顶和半顶角这三个因素决定.

定义 11.12 由一族互相平行的直线构成的曲面称为柱面. 称这些直线为它的直母线. 柱面上的一条曲线如果和每一条直母线都相交，就称它为柱面的一条准线.

定义 11.13 由一族过同一点 M_0 的直线构成的曲面称为锥面. 称这些直线为它的直母线. 称 M_0 为锥顶，锥面上不过锥顶的一条曲线如果和每一条直母线都相交，就称为它的一条准线.

12 柱面的求法

设在一个仿射坐标系中，向量 $\boldsymbol{u}$ 的坐标为 (k, m, n)，Γ 有方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

则点 $M(x, y, z) \in S$ 的充分必要条件是，$\exists$ 实数 t，使得

$$\begin{cases} F(x+tk, y+tm, z+tn) = 0, \\ G(x+tk, y+tm, z+tn) = 0. \end{cases}$$

如果从其中一式解出 t（作为 (x, y, z) 的函数），代入另一式，就得到 S 的一般方程.

常用的情形是 Γ 为一条平面曲线（这种准线总是存在的，每张不平行于柱面方向的平面和柱面的交线就是这样的准线），并设 $F(x, y, z) = 0$ 是平面的一般方程

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

则由

$$A(x+tk)+B(y+tm)+C(z+tn)+D=0,$$

解出

$$t=-\frac{Ax+By+Cz+D}{Ak+Bm+Cn},$$

代入 $G(x+tk,y+tm,z+tn)=0$，得到 S 的一般方程

$$G\left(x-\frac{k\,(Ax+By+Cz+D)}{Ak+Bm+Cn},y-\frac{m\,(Ax+By+Cz+D)}{Ak+Bm+Cn},z-\frac{n\,(Ax+By+Cz+D)}{Ak+Bm+Cn}\right)=0.$$

13 锥面的求法

有了锥顶和一条准线，锥面就确定了. 如果一个点不是锥顶，则它在锥面上的充分必要条件是它与锥顶的连线和准线相交.

设在一个仿射坐标系中，锥顶 M_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，准线 $\varGamma$ 有方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

则点 $M(x,y,z)$ 在锥面上的充分必要条件为：$\exists$ 实数 t，使得

$$\begin{cases}F((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty,(1-t)z_0+tz)=0,\\ G((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty,(1-t)z_0+tz)=0.\end{cases}$$

从其中一式解出 t，代入另一式，就得到锥面的方程.

实用上常把坐标系的原点取在锥顶，此时，如果准线在平行于坐标平面的一张平面上，譬如为

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=h.\end{cases}$$

则用上述方法得到方程

$$f\left(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z}\right)=0,$$

它是去掉锥顶的锥面的方程. 如果 $f(x,y)$ 是 n 次多项式，则此方程可有理化为一个 n 次齐次

方程（即其左边多项式的每一项都是 n 次项）：

$$z^n f\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0,$$

它的图像多了锥顶. 但是要注意，也可能增加了一些别的点，见例 6.

一般地，每个 n 次齐次方程的图像一定是锥顶为原点的锥面.

14 二次曲面

(1) 基本概念：

一个仿射坐标系中，x, y, z 的一个二次方程的图像称为二次曲面. 二次方程的一般形式为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

注：方程 $x^2 + y^2 = 0$ 的图像是直线（z 轴），但是它也算作二次曲面.

(2) 压缩变换：

在空间中取定了一个空间直角坐标系后，对点 $M(x, y, z)$ 做向 xy 平面的、系数为 k 的压缩，就是把它变为点 (x, y, kz). 如果对空间的每一点做这种压缩，就得到空间（作为点的集合）到自己的一个一一对应，称为空间向 xy 平面的系数为 k 的压缩变换. 同样可规定空间对 xz 平面和对 yz 平面的压缩变换. 这里的系数是一个正数. 当它小于 1 时，是真正意义的压缩，当它大于 1 时，实际上是拉伸. 以后统一称为压缩.

对一个图形作向 xy 平面的、系数为 k 的压缩，就是对图形上的每一点做这个压缩.

设图形 S 有方程

$$F(x, y, z) = 0,$$

它经过向 xy 平面的、系数为 k 的压缩后变为 S'. 我们来求 S' 的方程.

空间任意一点 $M'(x, y, z)$ 是由点 $M\left(x, y, \frac{z}{k}\right)$ 压缩而得. 因此 $M' \in S'$ 的充分必要条件是，$M \in S$，即

$$F\left(x, y, \frac{z}{k}\right) = 0,$$

这就是 S' 的方程.

(3) 压缩变换形成的二次曲面：

(a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$
它的图像是由单位球面

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

经过三次压缩得到的图形：向 yz 平面做系数为 a 的压缩；向 xz 平面做系数为 b 的压缩；向 xy 平面做系数为 c 的压缩. 读者不难想象出它的几何形象. 这种图形称为椭球面.（严格地说，一个图形如果在某个空间直角坐标系中有形如 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的方程，就称为椭球面. 下面几个曲面的严格定义类似.）

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$
它的图像是由旋转单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

向 xz 平面做系数为 $\dfrac{b}{a}$ 的压缩得到的图形，这种图形称为单叶双曲面.

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$
它的图像是由旋转双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

向 xz 平面做系数为 $\dfrac{b}{a}$ 的压缩得到的图形，这种图形称为双叶双曲面.

(d) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z.$
它的图像是由旋转抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z$$

向 xz 平面做系数为 $\dfrac{b}{a}$ 的压缩得到的图形，这种图形称为椭圆抛物面.

上面我们用压缩法得到了前四个二次方程的图像的几何形象，第五个方程的两个平方项的符号不同，因而它的图像不是旋转曲面的压缩像.

(4) 对称性：

在直角坐标系中，如果一个图形的每一点关于某坐标平面的对称点也在此图形上，就说它有关此坐标平面对称.

点 $M(x, y, z)$ 关于 xy 平面的对称点的坐标为 $(x, y, -z)$，于是如果二次曲面的方程中，z 只以平方项的形式出现，则它一定关于 xy 平面对称. 对另两张坐标平面的对称性也有同样的结论.

如果一个图形的每一点关于某坐标轴的对称点也在此图形上，就说它关于此坐标轴对称.

点 $M(x, y, z)$ 关于原点的对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$，于是如果二次曲面的方程中只有二次项和常数项，没有一次项，则它一定关于原点对称.

(5) 平面截线法：

平面截线法是通过考察一族互相平行的平面和曲面的交线（称为曲面的平面截线）的变化情况来认识曲面的方法. 地理学中常用的等高线法就是这种方法. 通常用平行于坐标平面的平面族的截线. 例如

对于椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

平行于 xy 平面的平面 $z = h$ 的截线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $|h| < c$ 时，该截图为椭圆，它随着 $|h|$ 的增大而缩小，但离心率不变；当 $|h| = c$，截线为空集. 由此可见，椭球面局限于 $-c \leqslant z \leqslant c$ 的范围内，用平行于另两张坐标平面的平面截割，情形完全类似. 椭球面在长方体

$$\left\{\left| \begin{array}{c} -a \leqslant x \leqslant a, \\ -b \leqslant y \leqslant b, \\ -c \leqslant z \leqslant c \end{array} \right|\right.$$

内.

对于单叶双曲面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$
平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 的截线为
$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{array}\right.$$
该截线是椭圆，它随 $|h|$ 的减小而缩小，离心率不变. 在 $h=0$ 时的截线最小，是 xy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，称为单叶双曲面的腰椭圆. 整个曲面位于柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外面，只有腰椭圆在此柱面上. 但是，平行于另两张坐标平面的平面截线不是椭圆. 例如，平面
$$x=k$$
的截线为
$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2}, \\ x=k. \end{array}\right.$$
当 $k=a$ 时，该截线是两条相交直线，交点在腰椭圆上，坐标为 $(a,0,0)$；当 $|k|<a$ 或 $|k|>a$ 时，截线都是双曲线. 但 $|k|<a$ 时，双曲线的实轴平行于 y 轴，虚轴平行于 z 轴；$|k|>a$ 时则相反. 平面 $y=k$ 的截线的情况类似.

对于双叶双曲面
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{x^2}=-1,$$
平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 的截线为
$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h. \end{array}\right.$$
当 $|h|>c$ 时，该截线为椭圆，它随 $|h|$ 的减小而缩小；在 $|h|=c$ 时，缩为一点；当 $|h|<c$ 时为空集. 因此在平面
$$z=c \quad 和 \quad z=-c$$
之间无此双叶双曲面的点. 但是，平行于 yz 平面和 xz 平面的任何平面的截线总是双曲线，实轴平行于 z 轴.

对于椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

平行于 xy 平面的平面 $z=h$ 的截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2h,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $h>0$ 时，该截线为椭圆，它随 h 的减小而缩小；在 $h=0$ 时缩为一点；$h<0$ 时为空集. 因而此双叶双曲面在 xy 平面的上方. 但是，平行于 yz 平面和 xz 平面的任何平面的截线总是抛物线，对称轴平行于 z 轴.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

的图像称为双曲抛物面. 平行于 xy 平面的平面

$$z=h,$$

它的截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $h=0$ 时，该截线是 xy 平面上的两条相交于原点的直线；当 $h\neq 0$ 时，是双曲线.$h>0$ 时，双曲线的实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 y 轴；$h<0$ 时则相反. 但是，平行于另两张坐标平面的平面的截线都是抛物线. 例如平面 $y=k$ 的截线为

$$\begin{cases}2z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{k^2}{b^2},\\ y=k.\end{cases}$$

对 $\forall k$，它的对称轴总平行于 z 轴，并且开口向着 z 轴正向. 它的大小形状和 k 无关，但是顶点随着 $|k|$ 的增加而降低. 另一平面

$$x=k$$

的截线为

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = k. \end{cases}$$

它的对称轴也平行于 z 轴，但开口向着 z 轴负向，大小形状也和 k 无关. 顶点随着 $|k|$ 的增加而上升，并且顶点坐标为 $\left(k, 0, \dfrac{k^2}{2a^2}\right)$，因此在抛物线

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = 0 \end{cases}$$

上. 因而整个曲面可看作以抛物线

$$\begin{cases} 2z = -\dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = 0 \end{cases}$$

上的平行移动的轨迹（见2-2）. 于是我们就有了对此曲面几何形象的认识. 它经过原点，并且在原点附近的一个小块像一个马鞍，因此双曲抛物面也称为马鞍面.

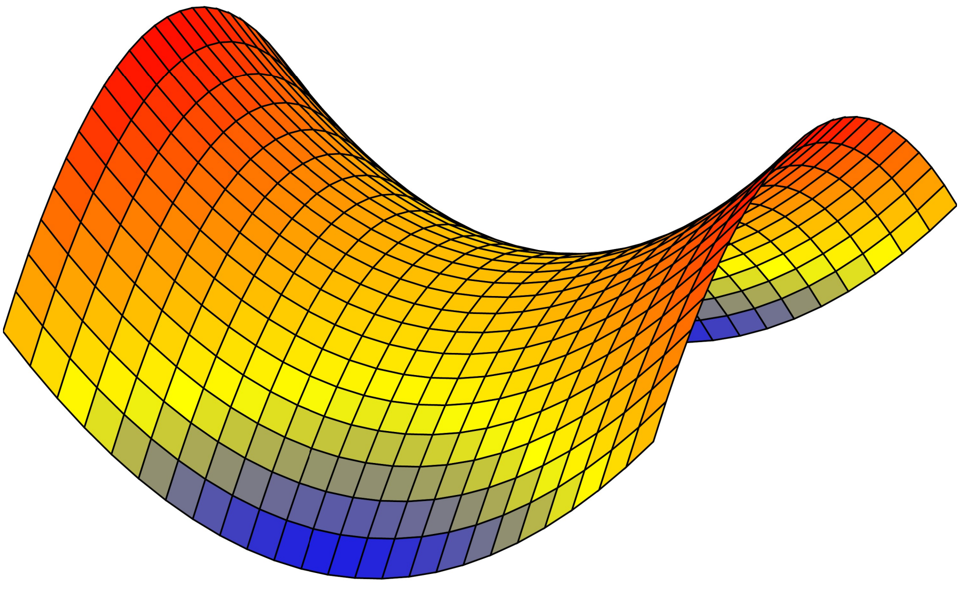

图 2-2

15 直纹性

(1) 基本概念：

由一族直线构成的曲面称为直纹面，这些直线称为它的直母线. 例如柱面、锥面或平面都是直纹面；旋转单叶双曲面也是直纹面，因为它可由一条直线绕轴旋转而得到.

如果一个二次曲面是柱面或锥面，它一定是直纹二次曲面.

椭球面不是直纹面，因为它是有界的，容不下直线. 椭圆抛物面也不是直纹面，因为它位于 xy 平面的上方，如果它上面有直线，则此直线一定平行于 xy 平面，但是它的 $z=h$ 平面的截线是椭圆，容不下直线. 用类似方法还可说明双曲面也不是直纹面.

(2) 双曲抛物面的直纹性：

把双曲抛物面 S 的方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

改写为

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z,$$

就容易看出对于 $\forall$ 实数 c，平面

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=c$$

和 S 的交线是直线

$$l_c:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=c,\\ c\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2z;\end{cases}$$

平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c$$

和 S 的交线是直线

$$l'_c:\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=c,\\ c\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2z.\end{cases}$$

于是我们得到 S 上的两族直母线

$$I=\{l_c\mid c\in\mathbb{R}\}$$